

بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم تجمع ذرات سه هدفه^۱

اسعد اله رضایی

دانشجوی دکترای اقتصاد دانشگاه رازی، alahrezaee1982@gmail.com

علی فلاحتی*

دانشیار اقتصاد دانشگاه رازی، ali.falahatii96@gmail.com

کیومرث سهیلی

دانشیار اقتصاد دانشگاه رازی، qsoheily@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۲/۲۴ تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۶/۱۷

چکیده

در بهینه‌سازی سبد دارایی، مسئله اصلی انتخاب بهینه دارایی‌ها و اوراق بهاداری است که با مقدار مشخصی سرمایه می‌توان تهیه نمود. در تحقیق حاضر مسئله بهینه‌سازی سه هدفه (یعنی حداکثرسازی بازده سبد سهام، حداقل‌سازی ریسک آن و تابع هدف سوم یعنی حداقل‌سازی تعداد دارایی‌ها یا سهام‌ها) مورد مطالعه قرار گرفته است. بر این اساس، سرمایه‌گذاران با پذیرش مقدار کمی ریسک و تقریباً همان مقدار بازده، سبدهای را انتخاب می‌کنند که تعداد دارایی کمتر داشته باشد. داده‌های مسئله، قیمت ۳۲۳ روز ۳۳۲ شرکت عضو سازمان بورس و اوراق بهادار تهران از تاریخ ۱۳۹۵/۱۱/۰۷ تا ۱۳۹۷/۰۱/۰۸ است. هدف از انتخاب این تعداد شرکت نیز، همانا بررسی کارآمدی دو الگوریتم MOPSO و NSGA2 در مقایسه با روش کلاسیک مارکوئیتز در بهینه‌سازی چند هدفه است. برای این منظور در ابتدا از دو الگوریتم ژنتیک با رتبه‌بندی نامغلوب (NSGA2) و الگوریتم تجمع ذرات چند هدفه (MOPSO) برای برآورد مدل دو هدفه حداقل واریانس و حداکثر بازده برای شناسایی الگوریتم بهتر استفاده شده است. سپس با توجه به عملکرد بهتر الگوریتم MOPSO، از این الگوریتم برای برآورد مدل سه هدفه حداکثرسازی بازده سبد سهام، حداقل‌سازی ریسک و حداقل‌سازی تعداد سهام‌ها استفاده گردیده است.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی سبد سهام، مدل مارکوئیتز، الگوریتم MOPSO، الگوریتم NSGA2.

طبقه‌بندی JEL: G21, G17, G11, C61

^۱ مقاله حاضر مستخرج از رساله دکترای نویسنده اول در دانشگاه رازی است.

* نویسنده مسئول مکاتبات

۱- مقدمه

بهینه‌سازی چند هدفه، یکی از زمینه‌های بسیار فعال و پر کاربرد تحقیقاتی در میان مباحث بهینه‌سازی است. غالباً بهینه‌سازی چند هدفه^۱ به نام‌های بهینه‌سازی چند معیاره^۲ و بهینه‌سازی برداری^۳ نیز شناخته می‌شود. روش‌های فراوانی تا کنون برای حل این مسائل ارائه شده‌اند که در حالت کلی می‌توان آن‌ها را به دو دسته تقسیم نمود:

۱. روش‌های کلاسیک که روش‌های تجزیه^۴ نیز نامیده می‌شوند، که اغلب مسأله چند هدفه را به یک مسأله یک هدفه تقلیل می‌دهند.

۲. روش‌های تکاملی، که اغلب مسأله بهینه‌سازی چند هدفه را واقعاً به صورت چند هدفه حل می‌نمایند.

در واقع در این حالت به دنبال به دست آوردن مجموعه‌ای از جواب‌ها هستیم که بتواند حداکثر تعداد ممکن از توابع هدف را بهینه سازد؛ این مجموعه جواب‌ها را بهینه پارتو می‌نامند. مسئله تعیین منحنی پارتو در فضای میانگین و واریانس در بهینه‌سازی سبد دارایی، در موارد مختلف از جمله زمانی که تعداد دارایی‌های قابل سرمایه‌گذاری و محدودیت‌های موجود در بازار مدل کم باشد و یا با استناد به ساده‌سازی مارکوویتز (به جای بهینه‌سازی همزمان دو هدف متضاد حداقل واریانس و حداکثرسازی بازده، با فرض ثبات یکی از آن‌ها، مقدار بهینه دیگری به دست آید)، توسط مدل‌های ریاضی حل شدنی است. اما هنگامی شرایط و محدودیت‌های دنیای واقعی در نظر گرفته شود، مسئله بهینه‌سازی سبد دارایی به سادگی و با استفاده از روش‌های کلاسیک ریاضی قابل حل نمی‌باشد. از این رو اهمیت استفاده از روش‌های نوین همچون الگوریتم‌های تکاملی در بهینه‌سازی سبد دارایی یکی از موضوعات مهم در دوران اخیر است. با توجه به موفقیت‌های کم نظیر الگوریتم بهینه‌سازی تجمع ذرات^۵ در حل مسائل بهینه‌سازی تک هدفه، دانشمندان و محققین بسیاری، سعی در استفاده از این الگوریتم برای حل مسائل چند هدفه داشته‌اند و تاکنون نسخه‌های متعددی از الگوریتم PSO برای حل مسائل چند هدفه ارائه شده است. از این رو در این تحقیق سعی در استفاده از این الگوریتم در بهینه‌سازی سبد سهام خواهیم داشت. همچنین به جهت مقایسه، کاربرد الگوریتم ژنتیک

¹ Multi-Objective Optimization

² Multi-Criteria Optimization

³ Vector Optimization

⁴ Decomposition

⁵ Particle Swarm Optimization (PSO)

دو هدفه با مرتب‌سازی نامغلوب در مقابل الگوریتم تجمع ذرات ارائه شده است تا در نهایت الگوریتم بهتر برای حالت سه هدفه مورد استفاده قرار گیرد. از این رو هدف این تحقیق ارائه مدلی مبتنی بر بهینه‌سازی چند هدفه^۱ است که در آن انتخاب ترکیب‌های مختلف سهام‌های موجود در یک سبد دارایی (بهینه پارتو) متناسب با سه هدف متضاد حداکثرسازی بازده سهام، حداقل‌سازی ریسک و حداقل‌سازی تعداد سهام با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی تجمع ذرات است.

۲- ادبیات موضوع

در سال‌های اخیر بازارهای مالی با نوسان‌های بسیار زیادی مواجه گردیده‌اند. به عنوان مثال، روند جهانی شدن اقتصاد، باعث شده تا سرایت‌پذیری بحران‌های مالی از یک بازار به بازارهای دیگر بسیار افزایش یابد و این به معنای افزایش نوسان در بازارهای مالی است. از سوی دیگر، افت شدید قیمت سهام در بسیاری از بازارهای سرمایه به زیان‌های قابل توجه برای عوامل فعال در آن‌ها منجر شده است (اصغرپور و رضازاده، ۱۳۹۴)^۲. بنابراین، فعالیت در بازارهای مالی با عدم اطمینان و ریسک همراه خواهد بود که اندازه‌گیری میزان آن برای سرمایه‌گذاران حائز اهمیت است. یکی از راه‌های کنترل ریسک سرمایه‌گذاری، تشکیل سبد دارایی^۳ است.

سبد کارا، به معنای ترکیب مطلوب دارایی‌ها به نحوی است که ریسک سبد به ازای نرخ بازده معین، به حداقل رسیده باشد. در واقع، دو مؤلفه مهم در تصمیم‌گیری برای سرمایه‌گذاری، میزان ریسک و بازده دارایی‌های سرمایه‌ای است. سرمایه‌گذاران عقلایی، بازده را مطلوب دانسته و از ریسک‌گریزان هستند. به علاوه در تصمیم‌گیری منطقی عمل می‌کنند که این امر باعث حداکثر شدن بازده مطلوب آن‌ها می‌شود. بنابراین مطلوبیت سرمایه‌گذاران، تابعی است از بازده مورد انتظار و ریسک، که این دو عامل، پارامترهای اساسی تصمیمات مربوط به سرمایه‌گذاری هستند. به عبارت دیگر، در مسئله بهینه‌سازی سبد دارایی‌ها به دنبال سبدهای هستیم که انحراف معیار (ریسک) کمتر و ارزش انتظاری بیشتری تولید کند. این مسئله می‌تواند در قالب یک مدل تحقیق در عملیات، به صورت رابطه زیر مدل‌سازی شود:

^۱ Multi-Objective Optimization

^۲ Asgharpour & Rezazade (2015)

^۳ Portfolio

$$\begin{aligned} \text{Min Risk } \sigma_i^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \\ \text{Max Return } R_p &= \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

که در آن w_i وزن دارایی i ام و یا به عبارتی درصد وجوه قابل سرمایه‌گذاری در این دارایی و R_i بازده آن و R_p بازده کل سبد دارایی است. σ_i^2 نیز بیانگر واریانس دارایی i ام و σ_{ij} بیانگر کوواریانس میان دو دارایی i ام و j ام هستند. همچنین گاهی اوقات نیاز است که محدودیت دیگری به منظور جلوگیری از فروش استقراسی^۱ به مدل افزوده شود که این محدودیت همان مثبت بودن وزن هر یک از دارایی‌های موجود در سبد است. آخرین محدودیتی که در این مدل وجود دارد، برابر یک بودن حاصل جمع وزن‌ها دارایی‌هاست (نریمانی، ۱۳۹۲)^۲.

مدل ۱، مدلی است که در اکثر مقالات و تحقیقات مشابه در این زمینه به عنوان مدل پایه‌ای مورد استفاده قرار گرفته است که با روش‌های مختلف ریاضی و یا فراابتکاری، ترکیبات مختلفی از w_i هایی که دو معیار حداقل ریسک و حداکثرسازی بازده را بهینه می‌کنند برآورد می‌گردد. همچنین از آنجا که انتظار می‌رود وجود تعداد دارایی کمتر در سبد پرتفوی، سبب کاهش هزینه‌های خرید و فروش سهام و همچنین مدیریت آسان‌تر و بهتر پرتفوی گردد، در این تحقیق مسئله بهینه‌سازی سه هدفه (یعنی حداکثرسازی بازده سبد سهام، حداقل‌سازی ریسک آن و تابع هدف سوم یعنی حداقل‌سازی تعداد دارایی‌ها یا سهام‌ها) مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. بر این اساس، سرمایه‌گذاران با پذیرش مقدار کمی ریسک و تقریباً همان مقدار بازده، سبدی را انتخاب می‌کنند که تعداد دارایی کمتر داشته باشد. از این رو، نوآوری مدنظر در این تحقیق، در نظر گرفتن معیار یا هدف سومی تحت عنوان حداقل‌سازی تعداد دارایی‌ها یا سهام موجود در سبد سهام ($\text{Min count}(i|w_i > 0)$) به صورت مدل ۲ می‌باشد.

^۱ Short Selling

^۲ Narimany (2012)

$$\begin{aligned}
 \text{Min Risk } \sigma_i^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \\
 \text{Max Return } R_p &= \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \\
 \text{Min count}(i/w_i <> 0) & \\
 \text{s. t. } \sum_{i=1}^n w_i &= 1
 \end{aligned} \tag{۲}$$

همانطور که از مدل بهینه‌سازی بالا بر می‌آید، این مدل یک مسئله بهینه‌سازی چند هدفه بوده که در آن فرد تصمیم‌گیرنده با مجموعه‌ای از اهداف متضاد و متعارض (در اینجا حداکثرسازی بازده سبد، حداقل‌سازی ریسک متناظر با آن و حداقل تعداد سهام موجود در سبد) روبروست. در این گونه از مسائل، برخلاف مسائل بهینه‌سازی تک هدفه و به دلیل وجود چند هدف متعارض، به جای تنها یک جواب، مجموعه‌ای از جواب‌ها حاصل می‌شود که در اصطلاح جواب‌های پارتو (نامغلوب^۱) خوانده می‌شود. به عبارت دیگر، در صورت تناقض اهداف با یکدیگر، پیدا کردن یک جواب بهینه که به‌طور همزمان تمام توابع را بهینه کند، تقریباً غیرممکن است. با این حال می‌توان مجموعه‌ای از جواب‌ها را یافت که بهترین تعامل را بین اهداف برقرار کند به طوری که بهبود نمی‌یابند مگر این که سبب بدتر شدن اهداف دیگر شود (راعی و تلنگی، ۱۳۸۳)^۲.

در سال ۱۹۵۰ هری مارکوئیتز^۳ مدل سبد دارایی خود را ارائه کرد که مبنایی برای نظریه‌های مدرن مدیریت سبد دارایی قرار گرفت. وی برای اولین بار به صورت کمی نشان داد که چرا و چگونه تنوع‌سازی سبد دارایی می‌تواند باعث کاهش ریسک سبد (مجموعه سرمایه‌گذاری) یک سرمایه‌گذار شود. به عقیده مارکوئیتز از آنجا که سرمایه‌گذاران نسبت به آینده مطمئن نیستند، بایستی برای کاهش ریسک، دست به ایجاد تنوع در سرمایه‌گذاری‌های خود بزنند. تنوع‌سازی سبد دارایی عبارت است از انتخاب بهترین ترکیب از دارایی‌های مالی به نحوی که باعث شود تا حد امکان، بازده سبد سرمایه‌گذاری حداکثر و ریسک‌پذیری آن حداقل شود. ریسک‌گریز بودن کلیه سرمایه‌گذاران، فرض اصلی این الگو است. در الگوی مارکوئیتز، میانگین سبد دارایی، بازده مورد انتظار را نشان می‌دهد

^۱ Nondominated

^۲ Raie & Talangi (2004)

^۳ Marquitz. H

و واریانس، بیانگر ریسک سبد دارایی است. در واقع، مارکوئیتز مسئله بهینه‌سازی سبد دارایی را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی درجه دوم^۱ با هدف حداقل‌سازی واریانس مجموعه دارایی‌ها با این شرط که بازده مورد انتظار برابر با یک مقدار ثابت باشد، مطرح کرد. از این رو، این مدل تحت عنوان میانگین-واریانس نیز خوانده می‌شود.

یک سبد دارایی که از تنوع کافی برخوردار باشد، سبد دارایی کارا^۲ نامیده می‌شود. سبد کارا، به معنای ترکیب مطلوب دارایی‌ها به نحوی است که ریسک سبد به ازای نرخ بازده معین، به حداقل رسیده باشد. سرمایه‌گذاران می‌توانند از طریق مشخص کردن نرخ بازده مورد انتظار سبد و حداقل کردن ریسک آن در این سطح از بازده، سبد دارایی کارا را مشخص کنند.

در نظریه مارکوئیتز به دنبال سبدی هستیم که ریسک کمتر و بازده بیشتری را تولید کند. بنابراین می‌توان با حداقل‌سازی ریسک (واریانس) سبد دارایی با فرض (یا محدودیت) ثابت بودن میزان بازده آن، به مدل‌سازی نظریه مارکوئیتز پرداخت. همچنین گاهی اوقات نیاز است که محدودیت دیگری نیز به مدل مارکوئیتز اضافه شود؛ این محدودیت همان مثبت بودن وزن هر یک از دارایی‌های موجود در سبد است. وجود این محدودیت به دلیل جلوگیری از فروش استقراسی^۳ است که در آن وزن‌ها می‌توانند منفی نیز باشند. آخرین محدودیتی که در این مدل وجود دارد، برابر یک بودن حاصل جمع وزن‌ها دارایی‌هاست. حال از آنجا تابع هدف به صورت حداقل‌سازی واریانس است، از این رو مدل مارکوئیتز یک مدل بهینه‌سازی غیرخطی (درجه دو) است که می‌تواند در قالب یک مدل تحقیق در عملیات، به صورت رابطه ۳ مدل‌سازی شود:

$$\begin{aligned} \text{Min } \text{Var}(R_p) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^n x_i E(R_i) &= R_{\text{Expeted}} \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

^۱ Quadratic Programming Model

^۲ Efficient Portfolio

^۳ Short Selling

توجه داشته باشید که با حل مدل بهینه‌سازی بالا، تنها یک نقطه کارا بر روی مرز کارا (متناظر با $R_{Expected}$) تولید می‌شود که در نتیجه برای تعیین مرز کارا، بایستی به تعداد نقاط مورد نظر بر روی این مرز، مدل بالا به ازای $R_{Expected}$ های مختلف حل شود.

۳- پیشینه تحقیق

در بهینه‌سازی سبد دارایی، مسئله اصلی انتخاب بهینه دارایی‌ها و اوراق بهاداری است که با مقدار مشخصی سرمایه می‌توان تهیه کرد (فرناندز، ۲۰۰۷)^۱. اگر چه حداقل‌سازی ریسک و حداکثرسازی بازده سرمایه‌گذاری به نظر ساده می‌رسد، اما در عمل روش‌های متعددی برای تشکیل سبد بهینه مطرح شده است.

در سال ۱۹۵۰ هری مارکوئیتز مدل خود را ارائه کرد که مبنایی برای نظریه‌های مدرن مدیریت سبد دارایی قرار گرفت. وی برای اولین بار به صورت کمی نشان داد که چرا و چگونه تنوع‌سازی سبد دارایی می‌تواند باعث کاهش ریسک سبد (مجموعه سرمایه‌گذاری) یک سرمایه‌گذار شود.

پس از مارکوئیتز، افراد بسیاری سعی در توسعه و اصلاح مدل وی داشته‌اند. بیشتر الگوهای انتخاب سبد دارایی، تقسیم‌پذیری سرمایه‌گذاری را بی‌نهایت فرض می‌کنند، در حالی که در دنیای واقعی، دارایی‌ها در محدوده مشخصی معامله می‌شوند. به عنوان مثال، در مدل مارکوئیتز، وزن اختصاص داده شده به هر سهام در سبد کارا، می‌تواند بین صفر تا صد درصد تغییر کند^۲ که این نتیجه با دنیای واقعی در تضاد است؛ چرا که معمولاً درصد خریداری شده از یک سهام، از محدودیت‌های حد بالا و پایین (بین صفر و صد) تبعیت می‌کند. بنابراین چانگ و دیگران (۲۰۰۰)^۳ و فرناندز و گومز (۲۰۰۷)^۴ پیشنهاد می‌کنند که از یک الگوی برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط با در نظر گرفتن محدودیت‌های مربوط به حداقل و حداکثر معاملات استفاده شود. مدل‌سازی چنین الگویی که به مدل میانگین-واریانس با مؤلفه‌های محدود^۵ معروف است.

از سوی دیگر، برخی از پژوهشگران به مسئله بهینه‌سازی چند دوره‌ای سبد سهام پرداخته‌اند. در حالت چند-دوره‌ای، فرض می‌شود سرمایه‌گذاران به جای آن که در یک

^۱ Fernandez. A

^۲ تنها شرطی که در مدل مارکوئیتز بر روی وزن هر یک از دارائی‌ها قرار داده شده است، حقیقی و غیرمنفی بودن آن‌هاست.

^۳ Chang. T.J

^۴ Fernandez A & Gomez. S

^۵ Cardinality Constrained Mean-Variance (CCMV)

دوره سرمایه‌گذاری کنند، به صورت پیوسته فعالیت می‌کنند. در این زمینه سلیکورت و اوزکیسی (۲۰۰۷)^۱ عوامل مختلفی مانند عوامل اقتصادی، اجتماعی، سیاسی را در بهینه‌سازی سبد سهام در نظر گرفته‌اند. آن‌ها بازده تصادفی مورد مطالعه را با توجه به این عوامل و با استفاده از رویکرد زنجیره مارکوف مدل‌سازی کرده‌اند.

تعداد پژوهش‌ها و مطالعاتی که در زمینه بهینه‌سازی پرتفوی با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی تجمع ذرات^۲ انجام شده است، به نسبت سایر روش‌های ترکیبی بسیار کمتر است. یین و وانگ (۲۰۰۶)^۳ روش PSO را در مسئله غیرخطی تخصیص منابع به کار گرفته‌اند و کارایی این روش را با الگوریتم ژنتیک مقایسه کرده و نتیجه گرفته‌اند تکنیک PSO از الگوریتم ژنتیک کارتر است. یان و میانو و لی (۲۰۰۷)^۴ در پژوهشی، با استفاده از ترکیبی از روش‌های PSO و GA به انتخاب چند دوره‌ای پرتفوی با استفاده از عامل ریسک نیم‌واریانس پرداخته‌اند. آن‌ها نشان می‌دهند استفاده ترکیبی از PSO و GA از کاربرد هریک از آن‌ها به تنهایی به مراتب کارتر است.

در ایران در زمینه انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی عبدالعلی‌زاده و عشقی (۱۳۸۲)^۵ پژوهشی را در زمینه بهینه‌سازی پرتفوی توسط الگوریتم ژنتیک انجام دادند. تقوی‌فرد، منصور و خوش‌طینت (۱۳۸۶)^۶ با افزودن محدودیت‌های دیگری به مدل پیشین نشان دادند با استفاده از الگوریتم ژنتیک می‌توان مرز کارایی را به دست آورد که تا حدود زیادی تخمین‌زننده مرز کارایی به دست آمده در روش‌های مبتنی بر برنامه‌ریزی مرتبه دوم است. محدودیت‌هایی که آن‌ها به مسئله اضافه نمودند، محدودیت‌هایی مانند محدودیت عدد صحیح بودن تعداد سهام موجود در پرتفوی و همچنین محدودیت حد بالای اوزان دارایی‌ها بود.

راعی و علی‌بیگی (۱۳۸۹) با استفاده از روش بهینه‌سازی تجمع ذرات به حل مسئله بهینه‌سازی مارکوئیتز و تعیین مرز کارایی سرمایه‌گذاری، زمانی که تعداد دارایی‌های قابل سرمایه‌گذاری محدودیت‌های موجود در بازار زیاد باشد، می‌پردازند. آن‌ها با استفاده از اطلاعات قیمت ۲۰ سهم پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران در فاصله زمانی مهر

^۱ Celikyurt. U & Ozekici. S

^۲ Particle Swarm Optimization (PSO)

^۳ Yin. P & Wang. J

^۴ Yan. W, Miao. R & Li. SH

^۵ Abdolalizade & Eshghi (2003)

^۶ Mnsouri & Khoshniat (2007)

۱۳۸۵ تا شهریور ۱۳۸۷ اقدام به ترسیم مرز کارای سرمایه‌گذاری می‌پردازند. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد روش بهینه‌سازی تجمع ذرات در بهینه‌سازی سبد سهام با وجود محدودیت‌های بازار بسیار موفق است. ذکر این نکته در اینجا لازم است که علی‌رغم شباهت ظاهری عنوان این تحقیق و مقاله آقایان راعی و علی‌بیگی (۱۳۸۹)، تفاوت ماهوی در روش بهینه‌سازی سبد درایی در این دو تحقیق وجود دارد؛ در واقع در این مقاله با همان الگوی ارائه شده توسط مارکوئیتز در رابطه ۲ که در آن با ثابت در نظر گرفتن مقدار یکی از اهداف (در اینجا بازده)، اقدام به بهینه‌سازی تابع هدف دوم (در اینجا حداقل‌سازی ریسک) برای تشکیل سبد سهام نموده‌اند. در واقع با استفاده از چنین ترفندی، فرآیند حل یک مسئله بهینه‌سازی چند هدفه، تبدیل به حل چندین فقره مسئله بهینه‌سازی تک هدفه می‌گردد.

رجبی و خالوزاده (۱۳۹۳)^۱ دو روش مهم و پرکاربرد ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA2) و بهینه‌سازی چندهدفه ازدحام ذرات (MOPSO) با یکدیگر مقایسه شدند. جبهه‌های بهینه پارتوی به دست آمده، به سرمایه‌گذار این امکان را می‌دهد که از بین ریسک و ارزش‌های مختلف، سبد سرمایه بهینه مدنظر را انتخاب کند. ارزش سبد سرمایه و ریسک آن به عنوان اهداف بهینه‌سازی و معیار ارزش در معرض ریسک مشروط به عنوان سنج ریسک کار برده شد و سه قید عملی و کاربردی نیز برای حل مسئله مدنظر قرار گرفت. نتایج، عملکرد بهتر روش NSGA2 را نسبت به MOPSO برای هر دو معیار همگرایی و گستردگی جبهه بهینه‌های پارتو نشان داد. همچنین در پیش‌بینی سبد سهام بهینه، انطباق جبهه‌های بهینه پارتوی واقعی و پیش‌بینی شده، نشان‌دهنده کارایی بسیار مناسب روش‌های استفاده شده است.

موشخیان و نجفی (۱۳۹۴)^۲ ابتدا مدلی تحت عنوان مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای احتمالی میانگین-نیم‌واریانس-چولگی با در نظر گرفتن هزینه معاملات را ارائه می‌کنند. از آنجاکه حل مسئله سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای به خاطر غیرخطی بودن مسئله، بسیار دشوار می‌باشد، آن‌ها پس از مدل‌سازی مسئله با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات چند هدفه و تک هدفه اقدام به حل مدل ارائه شده می‌کنند.

¹ Rjabi & Khalozade (2014)

² Moshkehyan & Najafi (2015)

نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم PSO چند هدفه نتایج بهتری نسبت به الگوریتم PSO تک هدفه ایجاد می‌کند.

اما آن چه که در این تحقیق از پیاده‌سازی الگوریتم بهینه‌سازی تجمع ذرات چند هدفه مد نظر است، حداقل‌سازی ریسک، حداکثرسازی بازده و حداقل‌سازی تعداد سهام به طور همزمان (همانند مدل ۲) است.

۴- معرفی داده‌ها تحقیق و روش‌شناسی تحقیق

داده‌های مسئله، قیمت ۳۲۳ روز ۳۳۲ شرکت عضو سازمان بورس و اوراق بهادار تهران از تاریخ ۱۳۹۵/۱۱/۰۷ تا ۱۳۹۷/۰۱/۰۸ است. هدف از انتخاب این تعداد از شرکت نیز، همانا بررسی کارآمدی دو الگوریتم MOPSO و NSGA2 در مقایسه با روش کلاسیک مارکوئیتز در بهینه‌سازی چند هدفه است. در پیوست ۱ نماد بورسی ۳۳۲ شرکت مورد استفاده در این تحقیق آمده است.

داده‌های قیمت با استفاده از رابطه زیر، به صورت بازده روزانه محاسبه گردیده است:

$$r_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} \quad (4)$$

الگوریتم ژنتیک: الگوریتم ژنتیک^۱ اولین بار در سال ۱۹۶۲ توسط هالند^۲ معرفی گردید. این الگوریتم، یک تکنیک جستجوی سراسری است که بر اساس مفاهیم ژنتیک طبیعی و فرضیه تکامل داروین شکل گرفته است. در فرضیه تکامل، تنها آن بخشی از یک جمعیت ادامه نسل می‌یابد که بهترین خصوصیات را داشته و آن‌هایی که فاقد این خصوصیات باشند، به تدریج و در طی زمان از بین می‌روند.

این الگوریتم نیز مانند سایر الگوریتم‌ها، دارای یک تابع هدف می‌باشد که بایستی حداقل یا حداکثر شود. مراحل لازم برای اجرای الگوریتم ژنتیک را می‌توان به صورت شبه کد زیر خلاصه کرد.

مرحله ۱: تعیین مشخصات اولیه الگوریتم

- معرفی تابع هدف $f(x); x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.
 - تعیین تعداد جمعیت (n_p)، نحوه انتخاب والدین و عمل تقاطع، نرخ جهش، شرایط توقف الگوریتم و

مرحله ۲: اجرای الگوریتم

^۱ Genetic Algorithm (GA)

^۲ Holland

- تولید جمعیت اولیه به میزان n_p و ارزیابی مقادیر تابع هر یک از آنها.
- تا هنگامی که شرایط توقف الگوریتم برآورده نشده باشد:
- انتخاب والدین و ترکیب آنها برای ایجاد جمعیت فرزندان (n_c);
- انتخاب n_m عضو جمعیت برای عمل جهش برای تولید جمعیت جهش‌یافتگان؛
- ادغام جمعیت جاری، فرزندان و جهش‌یافتگان و ایجاد جمعیت بالقوه نسل بعد؛
- انتخاب بهترین کروموزوم‌های جمعیت بالقوه جدید به عنوان جمعیت اصلی نسل بعد؛

- چنانچه شرایط توقف برآورده شده باشند x^* ها و f^* متناظر با آنها را گزارش کنید.

اما تفاوت الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب با الگوریتم ژنتیک تک‌هدفه، در روش مرتب‌سازی پاسخ‌هاست. در واقع در حالت چندهدفه، پاسخ‌ها بر اساس فاصله ازدحامی مرتب می‌شوند. در هر تکرار از این الگوریتم، جمعیت جدید با انتخاب والدین از اعضای جمعیت اصلی و اعمال عملگرهای جهش و تقاطع به دست می‌آید.

روند اجرای الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب به شرح زیر است:

۱. ایجاد جمعیت اولیه با اندازه N ؛
۲. محاسبه مقادیر تابع هدف؛
۳. مرتب کردن پاسخ‌ها بر اساس غلبه و فاصله ازدحامی؛
۴. انتخاب والدین، عمل تقاطع و ایجاد جمعیت فرزندان؛
۵. انتخاب والدین، عمل جهش و ایجاد جمعیت جهش‌یافتگان؛
۶. ترکیب جمعیت جدید با جمعیت اصلی؛
۷. انتخاب اعضای جمعیت اصلی جدید با اندازه N بر اساس غلبه و فاصله ازدحامی؛
۸. در صورت برآورده نشدن شرایط خاتمه، گام دوم و در غیر این صورت پایان.

بهینه‌سازی تجمع ذرات: ایده بهینه‌سازی تجمع ذرات^۱ برای اولین بار توسط کندی و ابره‌ارت^۲ در سال ۱۹۹۵ مطرح شد. این روش نیز مانند سایر الگوریتم‌های فراابتکاری، الهام گرفته از طبیعت و بر اساس فرآیندی تکراری می‌باشد. منبع الهام این الگوریتم، رفتار گروهی و اجتماعی برخی حیوانات، همانند حرکت دسته جمعی پرندگان و ماهی‌ها بوده است. در این الگوریتم، هر پرنده، ماهی و یا در اصطلاح، هر ذره علی‌رغم اینکه به تنهایی رفتار ساده‌ای از خود نشان می‌دهد، دارای رفتار جمعی بسیار پیچیده‌ای است که

^۱ Particle Swarm Optimization (PSO)

^۲ Kennedy & Eberhart

از آن به عنوان هوش جمعی^۱ یاد می‌شود. اگرچه بهینه‌سازی تجمع ذرات شباهت‌های بسیاری با الگوریتم ژنتیک دارد، اما در واقع ساختار بسیار ساده‌تری نسبت به آن دارد. در این روش، چندین ذره به طور همزمان به جستجو در فضای جواب‌ها می‌پردازند که از این منظر، مشابه عملکرد کروموزوم‌ها در الگوریتم ژنتیک می‌باشد. با این وجود، بهینه‌سازی تجمع ذرات یا PSO، از ارتباط همزمان و متقابل میان مجموعه ذرات نیز بهره می‌گیرد، در حالی که در الگوریتم ژنتیک، چنین ارتباطی میان کروموزوم‌ها تعریف نشده است. از سوی دیگر، روش PSO تنها بر اساس اعداد حقیقی شکل گرفته است که به همین جهت، کاربرد و استفاده از آن به دلیل عدم نیاز به کدگذاری و کدگشایی مجموعه جواب‌ها برای تبدیل آن‌ها به اعداد حقیقی، بسیار ساده‌تر می‌باشد.

در الگوریتم PSO، هر عنصر جمعیت، یک ذره نامیده می‌شود که معادل کروموزوم در GA می‌باشد. برای هر ذره، دو مقدار وضعیت و سرعت^۲ تعریف می‌شود که به ترتیب با یک بردار مکان و یک بردار سرعت، مشخص می‌شوند. این الگوریتم، با تعدیل و اصلاح مسیر حرکت تک‌تک ذرات یک مجموعه، متناسب با بهبود تابع هدف، به جستجوی جواب بهینه می‌پردازد. این ذرات به طور تکرار شونده‌ای در فضای n بُعدی مسئله^۳ حرکت می‌کنند تا نقاط مختلف فضای جستجو و جواب‌های جدید را جستجو کنند. در این الگوریتم، یک حافظه به ذخیره بهترین موقعیت هر ذره در گذشته و یک حافظه به ذخیره بهترین موقعیت پیش‌آمده در میان همه ذرات، اختصاص می‌یابد. با تجربه حاصل از این حافظه‌ها، ذرات تصمیم می‌گیرند که در مرحله بعدی، چگونه حرکت کنند. بنابراین در هر بار تکرار، همه ذرات در فضای n بُعدی مسئله حرکت می‌کنند تا بالاخره نقطه بهینه سراسری پیدا شود.

همان‌طور که اشاره شد، هر ذره در هر تکرار، سرعت و موقعیت خود را بر حسب بهترین جواب‌های محلی و سراسری به روز رسانی می‌کند. بهترین جواب‌های محلی و سراسری، بهترین جواب‌هایی هستند که تا زمان جاری اجرای الگوریتم، به ترتیب توسط ذره مورد نظر و کل مجموعه ذرات به دست آمده‌اند. برای مثال، بردار سرعت ذره $k+1$ در تکرار k ام (تکرار بعدی) برآیندی از سه مؤلفه مختلف می‌باشد؛ مؤلفه اول، همان بردار سرعت پیشین است که در تکرار k ام به دست آمده است، مؤلفه دوم بر اساس حرکت به سمت

^۱ Swarm Intelligence

^۲ Velocity

^۳ بُعد فضای مسئله، برابر تعداد متغیرهای تصمیم موجود در تابع مورد نظر برای بهینه‌سازی می‌باشد.

بهترین مکان یا جواب قبلی همان ذره^۱ و در نهایت مؤلفه سوم بر اساس حرکت به سمت بهترین مکان یا جوابی است که تاکنون توسط مجموعه ذرات به دست آمده است، شکل می‌گیرد. نحوه اصلاح سرعت ذره نام را می‌توان به صورت رابطه ۵ نوشت:

$$v_i^{k+1} = wv_i^k + c_1r_1(s_i^{lb} - s_i^k) + c_2r_2(s_i^{gb} - s_i^k) \quad (5)$$

که در آن s_i^{lb} ، s_i^{k+1} ، s_i^k و s_i^{gb} به ترتیب بردار مکان ذره نام در دوره جاری (تکرار k ام)، بردار مکان ذره نام در تکرار $k+1$ ، مکان بهینه ذره نام تا دوره جاری و بهترین مکان به دست آمده توسط مجموعه ذرات می‌باشند. v_i^k نیز بردار سرعت ذره نام در تکرار k و $k+1$ ام می‌باشند. همچنین w پارامتر اینرسی^۲ است که مقدار آن تعیین کننده تمایل هر ذره در حرکت در امتداد بردار سرعت فعلی خود می‌باشد. c_1 و c_2 به ترتیب پارامتر ادراکی و پارامتر اجتماعی نامیده می‌شوند و مفهومی مشابه با w دارند و بیانگر تمایل ذره در حرکت به سمت بهترین جواب بهینه قبلی خود و جواب بهینه سراسری تا تکرار k ام می‌باشند. r_1 و r_2 نیز اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $[0,1]$ می‌باشند. حال با محاسبه بردار سرعت جدید بر اساس رابطه فوق، مکان جدید ذره نام در تکرار بعدی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$s_i^{k+1} = s_i^k + v_i^{k+1} \quad (6)$$

مراحل لازم برای بهینه‌سازی تجمع ذرات، می‌تواند به صورت شبه کد زیر، خلاصه گردد.

مرحله ۱: تعیین مشخصات اولیه الگوریتم

- معرفی تابع هدف. $f(x)$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$
- تعیین ذرات اولیه، مختصات مجاز x_i ، بردار سرعت v_i برای هر ذره، حداکثر تعداد تکرار مجاز در کل الگوریتم (K).

مرحله ۲: اجرای الگوریتم

- تا هنگامی که تعداد تکرارها کمتر از K باشد ($k < K$):
- $k = k + 1$
- ایجاد بردار سرعت جدید v_i^{k+1} برای هر یک از ذرات با استفاده از معادله ۵-۱؛
- محاسبه مختصات جدید با استفاده از رابطه ۵-۲؛
- ارزیابی تابع هدف به ازای مختصات نقاط جدید؛
- اگر $k = K$ باشد، توقف کنید و x_i^* و f^* را گزارش کنید.

^۱ دلیل استفاده از جواب بهینه قبلی هر ذره، افزایش تنوع در کیفیت راه‌حل می‌باشد.

در اینجا نیز استفاده از رتبه‌بندی پارتو می‌تواند راه مناسبی برای توسعه الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات یک هدفه به منظور حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه باشد. آرشیو خارجی برای ذخیره پاسخ‌های غالبی که تاکنون تولید شده‌اند، به کار می‌رود. سازوکار جاذبه سراسری در ترکیب با آرشیو بردارهای غالب یافته شده قبلی، می‌تواند همگرایی به پاسخ‌های غالب سراسری را تقویت کند (کوئلو، پالیدو و لچاگا، ۲۰۰۴)^۱. آرشیو خارجی دو بخش مهم کنترل‌کننده آرشیو و شبکه‌بندی را شامل می‌شود و مهم‌ترین هدف آن نگهداری بردارهای نامغلوب یافته شده تا کنون طی فرایند جست و جو است.

کنترل‌کننده آرشیو تعیین می‌کند آیا پاسخ خاصی باید به آرشیو اضافه شود یا نه و فرآیند تصمیم‌گیری آن به این صورت است که بردارهای نامغلوبی که در هر تکرار الگوریتم به دست می‌آیند، با محتوای آرشیو که در ابتدا تهی است مقایسه می‌شوند. اگر آرشیو خارجی تهی باشد، در این صورت پاسخ‌های فعلی قابل قبول‌اند. اگر پاسخ‌های جدید توسط فردی از آرشیو مغلوب شود، این پاسخ حذف می‌شود. اگر هیچ یک از اعضای جمعیت خارجی پاسخ جدید را مغلوب نکند، این پاسخ در آرشیو ذخیره می‌شود. سرانجام اگر جمعیت خارجی به ظرفیت ماکزیمم خود برسد، روند شبکه‌بندی تطبیقی اجرا خواهد شد. بر این اساس، در آرشیو، فضای توابع هدف به چند ناحیه تقسیم می‌شود. اگر عضوی از آرشیو خارج از مرزهای فعلی شبکه قرار گیرد، شبکه باید بار دیگر محاسبه شده و هر عضو آن دوباره موقعیت‌دهی شود.

روند الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه جمعیت ذرات به صورت زیر است:

۱. ایجاد جمعیت اولیه؛
۲. مقداردهی اولیه به سرعت هر ذره؛
۳. ارزیابی هر ذره از جمعیت؛
۴. جداکردن اعضای نامغلوب جمعیت و ذخیره آن‌ها در آرشیو خارجی؛
۵. جدول‌بندی فضای هدف کشف شده؛
۶. هر ذره از میان اعضای آرشیو، رهبری انتخاب کرده و حرکت می‌کند؛
۷. بهترین خاطره شخصی هر یک از ذرات به روز می‌شود؛
۸. اعضای نامغلوب جمعیت فعلی به آرشیو اضافه می‌شود؛
۹. اعضای مغلوب آرشیو حذف می‌شود؛

¹ Colleo

۱۰. اگر تعداد اعضای آرشیو بیش از ظرفیت تعیین شده باشد، اعضای اضافی نیز حذف می‌شوند (اندازه آرشیو محدود است)؛
۱۱. اگر شرایط خاتمه محقق نشده باشد، به مرحله ۵ بازمی‌گردیم و در غیر این صورت، کار پایان می‌یابد.

از سوی دیگر، در بهینه‌سازی چندهدفه، به منظور مقایسه عملی پاسخ‌ها از نظر گستردگی و همگرایی جبهه پارتو، از معیار فاصله نسلی معکوس^۱ استفاده می‌شود. فرض کنید K^* مجموعه‌ای از نقاط قرار گرفته روی جبهه پارتو و K تخمینی از آن توسط هر یک از الگوریتم‌ها باشد؛ حال فاصله نسلی معکوس بین K و K^* از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود (لی و زنگ، ۲۰۰۹):

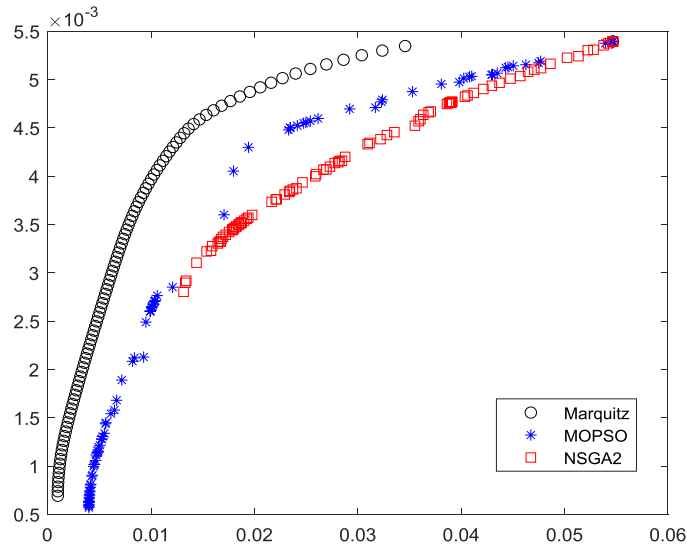
$$IGD(K^*, K) = \frac{\sum_{v \in K^*} d(V, K)}{|K^*|} \quad (7)$$

که در آن $d(V, K)$ کمترین فاصله اقلیدسی بین v و نقاط K است. اگر $|K^*|$ به اندازه کافی بزرگ باشد که بتواند جبهه پارتو را به خوبی تخمین بزند، IGD می‌تواند بیانگر هر دو معیار تنوع و همگرایی باشد. برای داشتن IGD کوچک‌تر، باید K هرچه بیشتر به جبهه پارتو نزدیک باشد و علاوه بر این نباید بخش‌هایی از کل جبهه را از دست داده باشد.

۵- یافته‌های تحقیق

در این تحقیق، در ابتدا شبیه‌سازی الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه با استفاده از الگوریتم مارکوئیتز انجام گرفته که به عنوان مبنایی برای مقایسه نحوه عملکرد دو الگوریتم MOPSO و NSGA2 مورد استفاده قرار خواهد گرفت. شکل زیر نتایج سه الگوریتم فوق‌الذکر را نشان می‌دهد.

^۱ Inverted Generational Distance (IGD)



نمودار (۱): نتایج الگوریتم مارکوئیتز، MOPSO و NSGA2 در بهینه‌سازی دو هدفه

منبع: یافته‌های تحقیق

مبنای بهتر بودن الگوریتم‌های MOPSO و NSGA2 از یکدیگر، نزدیک بودن نقاط واقع بر روی جبهه پارتوی هر یک از آنها به جبهه مارکوئیتز است؛ چرا که روش مارکوئیتز، مدل را به صورت دقیق حل نموده و در هر تکرار، جبهه مشابهی را به دست می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود الگوریتم MOPSO هم از لحاظ گستردگی و هم از منظر همگرایی به تعبیری نزدیکی به جبهه اصلی پارتو، دارای عملکرد بهتری نسبت به الگوریتم NSGA2 است.

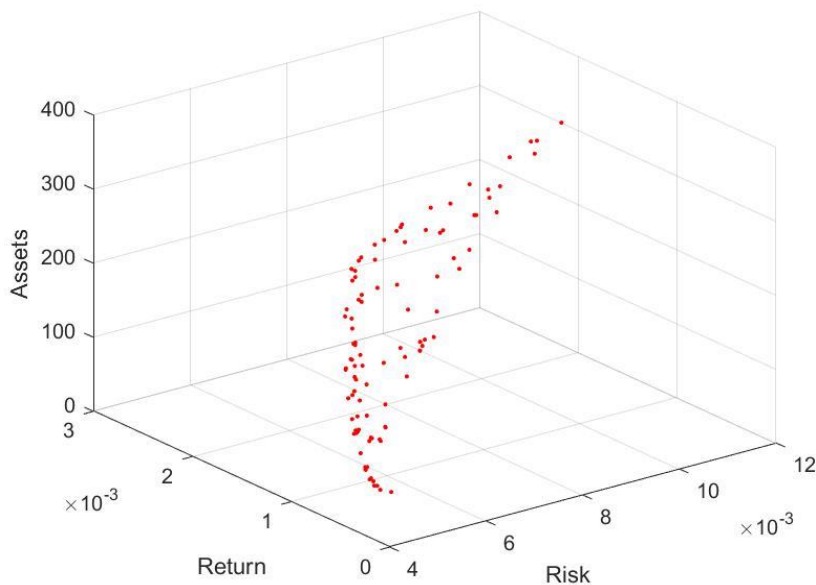
همچنین نتایج حاصل از محاسبه معیار فاصله نسلی معکوس دو الگوریتم MOPSO و NSGA2 در جدول زیر آمده است.

جدول (۱): مقایسه معیار IGD در دو الگوریتم MOPSO و NSGA2

معیار IGD	الگوریتم
۰٫۱۶۱۹	MOPSO
۰٫۶۵۲۲	NSGA2

منبع: یافته‌های تحقیق

داده‌های جدول بالا نیز نتایج نموداری شکل پیشین را تأیید می‌کند. همانطور که مشاهده می‌شود معیار فاصله نسلی معکوس الگوریتم MOPSO به میزان ۰/۱۶۱۹ بسیار کمتر از مقدار همین معیار در الگوریتم NSGA2 به میزان ۰/۶۵۲۲ است. حال همانطور که اشاره شد، از آنجا که انتظار می‌رود وجود تعداد دارایی کمتر در سبد پرتفوی، سبب کاهش هزینه‌های خرید و فروش سهام و همچنین مدیریت آسان‌تر و بهتر پرتفوی گردد، در این تحقیق مسئله بهینه‌سازی سه هدفه یعنی حداکثرسازی بازده سبد سهام، حداقل‌سازی ریسک آن و تابع هدف سوم یعنی حداقل‌سازی تعداد دارایی‌ها یا سهام‌ها نیز مد نظر قرار گرفته است. از این رو، نوآوری مدنظر در این تحقیق، در نظر گرفتن معیار یا هدف سوم تحت عنوان حداقل‌سازی تعداد دارایی‌ها یا سهام موجود در سبد سهام است که با استفاده از الگوریتم MOPSO سه هدفه مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نموداری این الگوریتم به صورت شکل زیر است.



نمودار (۲): نتایج الگوریتم MOPSO سه هدفه

منبع: یافته‌های تحقیق

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله از الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه، به منظور بهینه‌سازی مسئله سبد سرمایه استفاده شد. بهینه‌سازی چندهدفه به سرمایه‌گذار امکان می‌دهد که از بین

ریسک و ارزش‌های بهینه موجود، سبد سرمایه دلخواه خود (کم ریسک- کم بازده، ریسک متوسط- بازده متوسط و ریسک بالا- بازده بالا) را انتخاب کند. آنچه در این راستا اهمیت دارد، استفاده از روش‌هایی است که بتوانند جبهه‌های پارتو با گستردگی و همگرایی بیشتری تولید کنند. الگوریتم‌های فرابتکاری بررسی‌های شده در این مقاله MOPSO و NSGA2 بودند. نتایج نشان‌دهنده عملکرد بهتر روش MOPSO نسبت به NSGA2، برای هر دو معیار همگرایی و گستردگی جبهه بهینه پارتو بودند. همچنین در ادامه مسئله بهینه‌سازی سه هدفه (یعنی حداکثرسازی بازده سبد سهام، حداقل‌سازی ریسک آن و تابع هدف سوم یعنی حداقل‌سازی تعداد دارایی‌ها یا سهام‌ها) مورد مطالعه قرار گرفته است. در حالت کلی انتظار می‌رود، سرمایه‌گذاران با پذیرش مقدار کمی ریسک و تقریباً همان مقدار بازده، سبدي را انتخاب کنند که تعداد دارایی کمتری داشته باشد. از این رو با توجه به عملکرد بهتر الگوریتم MOPSO نسبت به NSGA2 در حالت دو هدفه، از این الگوریتم برای برآورد مدل سه هدفه حداکثرسازی بازده سبد سهام، حداقل‌سازی ریسک و حداقل‌سازی تعداد سهام‌ها استفاده شد.

فهرست منابع

۱. اصغرپور، حسین، و رضازاده، علی (۱۳۹۴). تعیین سبد بهینه سهام با استفاده از روش ارزش در معرض خطر. *فصلنامه نظریه‌های کاربردی اقتصاد*، ۲(۴)، ۹۳-۱۱۸.
 ۲. راعی، رضا، و پویان‌فر، احمد (۱۳۹۰). مدیریت سرمایه‌گذاری پیشرفته. تهران: سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت).
 ۳. راعی، رضا، و تلنگی، احمد (۱۳۸۳). مدیریت سرمایه‌گذاری پیشرفته. تهران: سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت)، ۱۰۵-۱۴۲.
 ۴. رجبی، مهسا و خالوزاده، حمید (۱۳۹۳). مقایسه بهینه‌سازی سبد سهام در بورس اوراق بهادار تهران با بهره‌مندی از الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی. *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۱۶(۲)، ۲۵۳-۲۷۰.
 ۵. عبدالعلی‌زاده، شهیر، و عشقی، سیمین (۱۳۸۲). کاربرد الگوریتم ژنتیک در انتخاب یک مجموعه دارایی از سهام بورس اوراق بهادار. *فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی*، ۵(۱۷)، ۱۷۵-۱۹۲.
 ۶. موشخیان، سیامک، و نجفی، امیرعباس (۱۳۹۴). بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوریتم چند هدفه ازدحام ذرات برای مدل احتمالی چند دوره‌ای میانگین-نیم‌واریانس-چولگی. *مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۶(۲۳)، ۱۳۳-۱۴۷.
 ۷. نریمانی، احمد، و نریمانی، رضا (۱۳۹۲). مدیریت سبد دارایی با استفاده از *MATLAB* و *GAMS*. تهران: انتشارات ناقوس.
 ۸. تقوی فرد، محمدتقی، و منصوری، طاهای و خوش‌طینت، محسن (۱۳۸۶). ارائه یک الگوریتم فراابتکاری جهت انتخاب سبد سهام با در نظر گرفتن محدودیت‌های عدد صحیح. *فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی*، ۷(۴)، ۴۹-۶۹.
- 1- Abdolalizade, Sh., & Eshghi. K (2004). Portfolio optimization using Genetic Algoritm. *Journal of Economic Research*, 5(17), 175-192 (In Persian).
 - 2- Asgharpor. H., & Rezazade. A, (2016). Determining the stock optimal portfolio using value at risk. *Applied Theories of Economics*, 3(4), 93-118 (In Persian).
 - 3- Bonabeau, E., Dorigo, M., & Theraulaz, G. (1999). *Swarm intelligence: from natural to artificial systems*, New York, Oxford University Press.
 - 4- Celikyurt. U, & Ozekici. S (2007). Multiperiod portfolio optimization models in stochastic markets using the mean-variance approach. *European Journal of Operational Research* (179), 186-202.
 - 5- Clerc, M. (2006). *Particle swarm optimization*. London, ISTE.

- 6- Chang, T., Meade, N., & Sharaiha, J. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization. *Computers & Operations Research* 27: 1271–1302.
- 7- Coello, C.A.C., & Lechuga, M.S. (2002). MOPSO, A Proposal for multiple objective particle swarm optimization. *Congress on Evolutionary Computation (CEC'2002)*, Vol. 2, 1051–1056.
- 8- Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., & Meyarivan, T. (2000). A fast elitist nondominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II. *In proceedings of parallel problem solving from nature - PPSN VI*, Springer 849–858.
- 9- Deb, K. (2001). Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. *John Wiley & Sons, Chichester, UK*.
- 10- Engelbrecht, A. P. (2005). Fundamentals of computational swarm intelligence. *Hoboken, NJ: Wiley*
- 11- Fernandez, A., Gomez, S. (2007). Portfolio selection using neural networks. *Computers & Operations Research* (34), 1177–1191.
- 12- Fieldsend, E., & Singh, S. (2002). A Multi-objective algorithm based upon particle swarm optimisation, an Efficient data structure and turbulence, proceedings of the 2002. *Workshop on Computational Intelligence, Birmingham, UK 37–44*.
- 13- Fonseca, C.M., & Fleming, P.J. (1993). Genetic algorithms for 13-multiobjective optimization, formulation, discussion, and generalization. *In Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms* 355–365.
- 14- Goldberg, D.E., & Richardson, J.J. (1987). Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization. *Genetic Algorithms and Their Applications, Proceedings of the Second ICGA, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ*, 41–49.
- 15- Haupt, R. L., & Haupt, S. E. (1998). Practical genetic algorithms. *New York: Wiley*.
- 16- Horn, J., Nafpliotis, N., & Goldberg, D.E. (1994). A niched pareto genetic algorithm for multiobjective optimization. *In Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence, vol: 1, Piscataway, New Jersey. IEEE Service Center* 82–87.
- 17- Kennedy, J., & Eberhart, R.C. (1995). Particle swarm optimization. *IEEE Int'l Conf. on Neural Networks*, (4), 1942–1948.
- 18- Kennedy, J., & Shi, Y. (2001). Swarm intelligence. *San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers*.
- 19- Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio in optimization model and its application to Tokyo stock market. *Management Science*, (37) 519–531.
- 20- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 77-90

- 21- Miettinen, K. (1999). Evolutionary algorithms in engineering and computer science: recent advances in genetic algorithms, evolution strategies, evolutionary programming, genetic programming, and industrial applications. *Chichester; New York: Wiley*.
- 22- Mitchell, M. (1998). An introduction to genetic algorithms. *Cambridge, Mass.: MIT Press*.
- 23- Moshekhian, S., & Najafi, A. (2015). Portfolio optimization using multi-objective particle swarm optimization. *Financial Engineering and Portfolio Management*, 6(23), 133-147 (In Persian).
- 24- Narimani, A., & Narimani, R. (2014). Portfolio management by using MATLAB & GAMS, *Naghos* (In Persian).
- 25- Olsson, A. (2011). Particle swarm optimization: theory, techniques and applications. *New York: Nova Science Publishers*.
- 26- Otten, R., & Ginneken, L. (1989). The annealing algorithm. *Boston: Kluwer Academic Publishers*.
- 27- Parsopoulos, K., & Vrahatis, M.N. (2002). Particle swarm optimization method in multiobjective problems. *Symposium on Applied Computing (SAC'2002)* 603–607.
- 28- Raei, R., & Alibaigi, H. (2011). Portfolio optimization using particle swarm optimization method. *Financial Research Journal*, (29) 21-41 (In Persian).
- 29- Raie, R., & Poutanfar, A. (2012). Advanced investment management. *The Organization for Researching and Composing University Textbook in the Humanities*, 175-192 (In Persian).
- 30- Raie, R., & Talangi, A. (2005). Advanced Investment Management. *The Organization for Researching and Composing University Textbook in the Humanities*, 175-192 (In Persian).
- 31- Rajabi, M., & Khalozade, H. (2015). Optimal portfolio prediction in Tehran stock market using multi-objective evolutionary algorithms, NSGA-II and MOPSO. *Financial Research Journal*, 16(2), 253-270 (In Persian).
- 32- Sumathi, S., Hamsapriya, T., & Surekha, P. (2008). Evolutionary intelligence: an introduction to theory and applications with Matlab, *Berlin: Springer*.
- 33- Taghavifard, M., & Mansouri, T. (2008). A Meta-heuristic algorithm for portfolio selection problem under cardinality and bounding constraints. *The Economic Research*, 7(4), 49-69 (In Persian).
- 34- Venkataraman, P. (2002). Applied optimization with MATLAB programming. *New York: Wiley*.
- 35- Yin Peng, Y., & Jing Yu, W. (2006). A particle swarm optimization approach to the nonlinear resource allocation problem. *Applied Mathematics and Computation*, 183: 232–242.

